

Funciones

Fundamentos para el Precálculo

Matemáticas para el Bachillerato

¿Qué es una Relación?

Definición

Una **relación** entre dos conjuntos A (dominio) y B (codominio) es un conjunto de pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$; no necesariamente todos los elementos de A participan.

¿Qué es una Relación?

Definición

Una **relación** entre dos conjuntos A (dominio) y B (codominio) es un conjunto de pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$; no necesariamente todos los elementos de A participan.

Ejemplo

Relación: $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

El elemento 1 se relaciona con 2 y 3

¿Qué es una Relación?

Definición

Una **relación** entre dos conjuntos A (dominio) y B (codominio) es un conjunto de pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$; no necesariamente todos los elementos de A participan.

Ejemplo

Relación: $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

El elemento 1 se relaciona con 2 y 3

Importante

No toda relación es una función.

Definición de Función

Función

Es una relación especial donde **cada elemento del dominio** se relaciona con **exactamente un único elemento** del codominio.

Definición de Función

Función

Es una relación especial donde **cada elemento del dominio** se relaciona con **exactamente un único elemento** del codominio.

Condición fundamental de unicidad

Para cada x del dominio existe exactamente un valor y en el codominio tal que $y = f(x)$.

Definición de Función

Función

Es una relación especial donde **cada elemento del dominio** se relaciona con **exactamente un único elemento** del codominio.

Condición fundamental de unicidad

Para cada x del dominio existe exactamente un valor y en el codominio tal que $y = f(x)$.

- ✓ Función: $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- × No es función: $\{(1, 2), (1, 3)\}$

Notación Funcional y Variables

Notación

$$y = f(x)$$

Se lee: *y es igual a f de x*

Notación Funcional y Variables

Notación

$$y = f(x)$$

Se lee: *y es igual a f de x*

- **Variable Independiente:** x (la que podemos elegir)
- **Variable Dependiente:** y o $f(x)$ (su valor depende de x)

Notación Funcional y Variables

Notación

$$y = f(x)$$

Se lee: *y es igual a f de x*

- **Variable Independiente:** x (la que podemos elegir)
- **Variable Dependiente:** y o $f(x)$ (su valor depende de x)

Valor de una función

Se evalúa sustituyendo x por un número específico.

Ejemplo: $f(2)$ significa evaluar la función en $x = 2$.

Clasificación General de Funciones (1)

1. Por su expresión algebraica:

- Explícitas: $y = f(x) \rightarrow y = 2x + 3$
- Implícitas: No despejadas $\rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Clasificación General de Funciones (1)

1. Por su expresión algebraica:

- Explícitas: $y = f(x) \rightarrow y = 2x + 3$
- Implícitas: No despejadas $\rightarrow x^2 + y^2 = 25$

2. Por su comportamiento:

- Crecientes
- Decrecientes
- Constantes

Clasificación General de Funciones (2)

3. Por su forma:

- Algebraicas (polinomiales, racionales, radicales)
- Trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas)

Clasificación General de Funciones (2)

3. Por su forma:

- Algebraicas (polinomiales, racionales, radicales)
- Trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas)

Observación

Esta clasificación ayuda a elegir el mejor método de análisis para cada función.

Dominio, Codominio y Rango

Definiciones

- **Dominio (D_f):** Valores posibles de x (entrada)
- **Codominio (C_f):** Conjunto de llegada
- **Rango (R_f):** Valores que realmente toma la función (salida)

Dominio, Codominio y Rango

Definiciones

- **Dominio (D_f):** Valores posibles de x (entrada)
- **Codominio (C_f):** Conjunto de llegada
- **Rango (R_f):** Valores que realmente toma la función (salida)

Relación

El rango es un subconjunto del codominio.

Determinación del Dominio

Restricciones comunes

- **Polinomial:** $\mathbb{R}$ (todos los reales)
- **Racional:** Denominador $\neq 0$
- **Raíz cuadrada:** Radicando ≥ 0
- **Logarítmica:** Argumento > 0

Determinación del Dominio

Restricciones comunes

- **Polinomial:** $\mathbb{R}$ (todos los reales)
- **Racional:** Denominador $\neq 0$
- **Raíz cuadrada:** Radicando ≥ 0
- **Logarítmica:** Argumento > 0

Ejemplos

- $f(x) = \frac{1}{x-2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- $g(x) = \sqrt{x+3} \rightarrow D_g = [-3, \infty)$
- $h(x) = \ln(x) \rightarrow D_h = (0, \infty)$

Rango e Interpretación Gráfica

Cómo encontrar el rango

1. Evaluar el comportamiento de la función
2. Observar la gráfica en el eje Y

Rango e Interpretación Gráfica

Cómo encontrar el rango

1. Evaluar el comportamiento de la función
2. Observar la gráfica en el eje Y

Ejemplos

- $f(x) = x^2 \rightarrow \text{Rango: } [0, \infty)$
- $f(x) = \sin(x) \rightarrow \text{Rango: } [-1, 1]$

Rango e Interpretación Gráfica

Cómo encontrar el rango

1. Evaluar el comportamiento de la función
2. Observar la gráfica en el eje Y

Ejemplos

- $f(x) = x^2 \rightarrow \text{Rango: } [0, \infty)$
- $f(x) = \sin(x) \rightarrow \text{Rango: } [-1, 1]$

Interpretación gráfica

El rango es la proyección de la gráfica sobre el eje Y.

Representación Verbal

Descripción en palabras

El costo de una llamada telefónica es de \$5 por minuto.

Representación Verbal

Descripción en palabras

El costo de una llamada telefónica es de \$5 por minuto.

Traducción matemática

$C(t) = 5t$ donde t es el tiempo en minutos

Representación Verbal

Descripción en palabras

El costo de una llamada telefónica es de \$5 por minuto.

Traducción matemática

$C(t) = 5t$ donde t es el tiempo en minutos

- Ayuda a entender el contexto
- Permite identificar variables y relaciones

Representación Tabular

Tabla de valores para $f(x) = 2x + 1$

x	$f(x)$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Representación Tabular

Tabla de valores para $f(x) = 2x + 1$

x	$f(x)$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

- **Ventajas:** Fácil de construir, útil para patrones
- **Desventaja:** No muestra todos los valores posibles

Representación Algebraica

Forma general

$$f(x) = \text{expresión algebraica}$$

Representación Algebraica

Forma general

$f(x)$ = expresión algebraica

Ejemplos

- Lineal: $f(x) = mx + b$
- Cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Racional: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$

Representación Algebraica

Forma general

$f(x)$ = expresión algebraica

Ejemplos

- Lineal: $f(x) = mx + b$
- Cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Racional: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$
- Precisa y completa
- Permite análisis matemático profundo
- Útil para cálculos exactos

Representación Gráfica

Elementos clave

- **Eje X:** Variable independiente
- **Eje Y:** Variable dependiente
- **Puntos:** Pares ordenados $(x, f(x))$

Representación Gráfica

Elementos clave

- **Eje X:** Variable independiente
- **Eje Y:** Variable dependiente
- **Puntos:** Pares ordenados $(x, f(x))$

Pasos para graficar

1. Construir tabla de valores
2. Ubicar puntos en el plano cartesiano
3. Unir puntos según el comportamiento

Prueba de la Línea Vertical

Criterio para identificar funciones

Si una **línea vertical** trazada en cualquier punto del dominio corta la gráfica en **más de un punto**, NO es función.

Prueba de la Línea Vertical

Criterio para identificar funciones

Si una **línea vertical** trazada en cualquier punto del dominio corta la gráfica en **más de un punto**, NO es función.

Ejemplos

- ✓ $y = x^2$ (parábola): vertical corta en 1 punto
- × $x^2 + y^2 = 25$ (circunferencia): vertical corta en 2 puntos

Función Constante

Definición

$$f(x) = c$$

donde c es un número real

Función Constante

Definición

$$f(x) = c$$

donde c es un número real

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $\{c\}$
- Gráfica: Línea horizontal
- Pendiente: $m = 0$

Función Constante

Definición

$$f(x) = c$$

donde c es un número real

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $\{c\}$
- Gráfica: Línea horizontal
- Pendiente: $m = 0$

Ejemplo

$$f(x) = 5$$

Función Lineal

Forma general

$$f(x) = mx + b$$

Función Lineal

Forma general

$$f(x) = mx + b$$

- **m : Pendiente** $\rightarrow$ Inclinação de la recta
 - $m > 0$: creciente
 - $m < 0$: decreciente
 - $m = 0$: constante
- **b : Ordenada al origen** $\rightarrow$ Punto donde corta al eje Y

Función Lineal

Forma general

$$f(x) = mx + b$$

- **m : Pendiente** → Inclinación de la recta
 - $m > 0$: creciente
 - $m < 0$: decreciente
 - $m = 0$: constante
- **b : Ordenada al origen** → Punto donde corta al eje Y

Fórmula de pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Rectas Verticales y Familia de Rectas

Rectas verticales

- No son funciones (NO pasan prueba vertical)
- Forma: $x = k$
- Pendiente: indefinida

Rectas Verticales y Familia de Rectas

Rectas verticales

- No son funciones (NO pasan prueba vertical)
- Forma: $x = k$
- Pendiente: indefinida

Familia de rectas

Conjunto de rectas que comparten una característica:

- $y = mx \rightarrow$ Rectas que pasan por el origen
- $y = 2x + b \rightarrow$ Rectas paralelas (misma pendiente)

Comportamiento Creciente, Decreciente o Constante

Definiciones

- **Creciente:** Si x aumenta, $f(x)$ aumenta
- **Decreciente:** Si x aumenta, $f(x)$ disminuye
- **Constante:** Si x aumenta, $f(x)$ no cambia

Comportamiento Creciente, Decreciente o Constante

Definiciones

- **Creciente:** Si x aumenta, $f(x)$ aumenta
- **Decreciente:** Si x aumenta, $f(x)$ disminuye
- **Constante:** Si x aumenta, $f(x)$ no cambia

En funciones lineales

- Creciente: $m > 0$
- Decreciente: $m < 0$
- Constante: $m = 0$

Función Identidad

Definición

$$f(x) = x$$

Función Identidad

Definición

$$f(x) = x$$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $\mathbb{R}$
- Gráfica: Recta que pasa por el origen con $m = 1$
- Es función lineal (caso especial)
- Es biyectiva (inyectiva y suprayectiva)

Función Cuadrática (1)

Forma general

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$

Función Cuadrática (1)

Forma general

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$

- **Parábola:** gráfica con forma de U
- **Vértice:** punto máximo o mínimo
- **Eje de simetría:** línea vertical que pasa por el vértice

Función Cuadrática (2)

Fórmula del vértice

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v)$$

Función Cuadrática (2)

Fórmula del vértice

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v)$$

Apertura

- $a > 0$: abre hacia arriba (mínimo)
- $a < 0$: abre hacia abajo (máximo)

Función Cuadrática (2)

Fórmula del vértice

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v)$$

Apertura

- $a > 0$: abre hacia arriba (mínimo)
- $a < 0$: abre hacia abajo (máximo)

Ejemplo

$f(x) = x^2 - 4x + 3$: vértice en $(2, -1)$, abre hacia arriba.

Funciones Polinomiales (1)

Forma general

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Funciones Polinomiales (1)

Forma general

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Dominio: $\mathbb{R}$ (todos los reales)
- Grado: exponente mayor

Funciones Polinomiales (2)

Ejemplos por grado

Grado	Nombre	Ejemplo
0	Constante	$f(x) = 7$
1	Lineal	$f(x) = 2x + 3$
2	Cuadrática	$f(x) = x^2 - 4x + 1$
3	Cúbica	$f(x) = x^3 + 2x$

Función Potencial

Definición

$$f(x) = x^n$$

donde n es un número real

Función Potencial

Definición

$$f(x) = x^n$$

donde n es un número real

Casos especiales

- $n = 1$: Identidad $f(x) = x$
- $n = 2$: Cuadrática $f(x) = x^2$
- $n = -1$: $f(x) = 1/x$ (racional)
- $n = 1/2$: $f(x) = \sqrt{x}$ (raíz)

Función Potencial

Definición

$$f(x) = x^n$$

donde n es un número real

Casos especiales

- $n = 1$: Identidad $f(x) = x$
- $n = 2$: Cuadrática $f(x) = x^2$
- $n = -1$: $f(x) = 1/x$ (racional)
- $n = 1/2$: $f(x) = \sqrt{x}$ (raíz)

Dominio variable

- n entero positivo: $\mathbb{R}$
- n entero negativo: $\mathbb{R} - \{0\}$

Función Racional

Definición

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios

Función Racional

Definición

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios

Restricción de dominio

$$Q(x) \neq 0$$

Función Racional

Definición

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios

Restricción de dominio

$$Q(x) \neq 0$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

Función Racional

Definición

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios

Restricción de dominio

$$Q(x) \neq 0$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

- **Asíntota vertical:** en $x = 2$ (denominador = 0)
- **Asíntota horizontal:** depende del grado de P y Q

Función Raíz Cuadrada

Definición

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Función Raíz Cuadrada

Definición

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Restricción de dominio

$$x \geq 0$$

Función Raíz Cuadrada

Definición

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Restricción de dominio

$$x \geq 0$$

- Dominio: $[0, \infty)$
- Rango: $[0, \infty)$
- Creciente en todo su dominio
- Corta ejes en $(0, 0)$

Función Raíz Cuadrada

Definición

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Restricción de dominio

$$x \geq 0$$

- Dominio: $[0, \infty)$
- Rango: $[0, \infty)$
- Creciente en todo su dominio
- Corta ejes en $(0, 0)$

Generalización

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow g(x) \geq 0$$

$$\text{Ejemplo: } f(x) = \sqrt{x-3} \rightarrow D_f = [3, \infty)$$

Función Valor Absoluto

Definición

$$f(x) = |x|$$

Función Valor Absoluto

Definición

$$f(x) = |x|$$

Por tramos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Función Valor Absoluto

Definición

$$f(x) = |x|$$

Por tramos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $[0, \infty)$
- Gráfica: forma de V
- Mínimo en $(0, 0)$
- Función par: $|-x| = |x|$

Función Mayor Entero

Definición

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

Mayor entero menor o igual a x

Función Mayor Entero

Definición

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

Mayor entero menor o igual a x

Ejemplos

- $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$
- $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$
- $\lfloor 5 \rfloor = 5$

Función Mayor Entero

Definición

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

Mayor entero menor o igual a x

Ejemplos

- $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$
- $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$
- $\lfloor 5 \rfloor = 5$
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $\mathbb{Z}$ (enteros)
- Gráfica: *Escalones* o función escalonada
- Discontinua en cada entero

Función Característica

Definición

Función que vale 1 en un conjunto específico y 0 fuera de él.

Función Característica

Definición

Función que vale 1 en un conjunto específico y 0 fuera de él.

Característica de A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Función Característica

Definición

Función que vale 1 en un conjunto específico y 0 fuera de él.

Característica de A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

- **Usos:** Teoría de conjuntos, probabilidad, procesamiento de señales

Desplazamientos Horizontales

Regla general

$$g(x) = f(x - h)$$

Desplazamientos Horizontales

Regla general

$$g(x) = f(x - h)$$

- Si $h > 0$: Desplazamiento a la **derecha**
- Si $h < 0$: Desplazamiento a la **izquierda**

Desplazamientos Horizontales

Regla general

$$g(x) = f(x - h)$$

- Si $h > 0$: Desplazamiento a la **derecha**
- Si $h < 0$: Desplazamiento a la **izquierda**

Ejemplo con $f(x) = x^2$

- $g(x) = (x - 3)^2 \rightarrow$ desplazada 3 unidades a la derecha
- $h(x) = (x + 2)^2 \rightarrow$ desplazada 2 unidades a la izquierda

Desplazamientos Verticales

Regla general

$$g(x) = f(x) + k$$

Desplazamientos Verticales

Regla general

$$g(x) = f(x) + k$$

- Si $k > 0$: Desplazamiento hacia **arriba**
- Si $k < 0$: Desplazamiento hacia **abajo**

Desplazamientos Verticales

Regla general

$$g(x) = f(x) + k$$

- Si $k > 0$: Desplazamiento hacia **arriba**
- Si $k < 0$: Desplazamiento hacia **abajo**

Ejemplo con $f(x) = x^2$

- $g(x) = x^2 + 3 \rightarrow$ desplazada 3 unidades arriba
- $h(x) = x^2 - 2 \rightarrow$ desplazada 2 unidades abajo

Desplazamientos Verticales

Regla general

$$g(x) = f(x) + k$$

- Si $k > 0$: Desplazamiento hacia **arriba**
- Si $k < 0$: Desplazamiento hacia **abajo**

Ejemplo con $f(x) = x^2$

- $g(x) = x^2 + 3 \rightarrow$ desplazada 3 unidades arriba
- $h(x) = x^2 - 2 \rightarrow$ desplazada 2 unidades abajo

Combinación

$$g(x) = f(x - h) + k$$

Desplazamiento horizontal h y vertical k

Alargamientos y Compresiones

Verticales

$$g(x) = a \cdot f(x)$$

- $|a| > 1$: **Alargamiento** vertical
- $0 < |a| < 1$: **Compresión** vertical

Alargamientos y Compresiones

Verticales

$$g(x) = a \cdot f(x)$$

- $|a| > 1$: **Alargamiento** vertical
- $0 < |a| < 1$: **Compresión** vertical

Horizontales

$$g(x) = f(bx)$$

- $|b| > 1$: **Compresión** horizontal
- $0 < |b| < 1$: **Alargamiento** horizontal

Ejemplo con $f(x) = x^2$

- $g(x) = 3x^2 \rightarrow$ más angosta (alargamiento vertical)
- $h(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow$ más ancha (compresión vertical)

Reflexiones

Respecto al eje X

$$g(x) = -f(x)$$

Invierte hacia arriba/abajo

Reflexiones

Respecto al eje X

$$g(x) = -f(x)$$

Invierte hacia arriba/abajo

Respecto al eje Y

$$g(x) = f(-x)$$

Invierte izquierda/derecha

Reflexiones

Respecto al eje X

$$g(x) = -f(x)$$

Invierte hacia arriba/abajo

Respecto al eje Y

$$g(x) = f(-x)$$

Invierte izquierda/derecha

Ejemplo con $f(x) = x^2$

- $g(x) = -x^2 \rightarrow$ parábola abre hacia abajo
- $h(x) = (-x)^2 = x^2 \rightarrow$ es igual (función par)

Transformaciones Combinadas (1)

Orden de operaciones para graficar

1. **Reflejar** (si aplica)
2. **Alargar/Comprimir** (si aplica)
3. **Desplazar** (horizontal y vertical)

Transformaciones Combinadas (1)

Orden de operaciones para graficar

1. Reflejar (si aplica)
2. Alargar/Comprimir (si aplica)
3. Desplazar (horizontal y vertical)

Importante

El orden es fundamental para obtener la gráfica correcta.

Transformaciones Combinadas (2)

Ejemplo

Graficar $g(x) = -2(x - 3)^2 + 1$ a partir de $f(x) = x^2$

1. Reflexión: $-x^2$
2. Alargamiento $\times 2$: $-2x^2$
3. Desplazamiento horizontal 3 a la derecha: $-2(x - 3)^2$
4. Desplazamiento vertical $+1$: $-2(x - 3)^2 + 1$

Gráfica a partir de otra conocida

Estrategia

1. Identificar la función base (conocida)
2. Identificar transformaciones
3. Aplicar en orden correcto
4. Graficar punto por punto

Gráfica a partir de otra conocida

Estrategia

1. Identificar la función base (conocida)
2. Identificar transformaciones
3. Aplicar en orden correcto
4. Graficar punto por punto

Funciones base comunes

- $f(x) = x$ (identidad)
- $f(x) = x^2$ (cuadrática)
- $f(x) = |x|$ (valor absoluto)
- $f(x) = \sqrt{x}$ (raíz cuadrada)
- $f(x) = \frac{1}{x}$ (racional)

Práctica

$g(x) = \sqrt{x-2} + 1 \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$ desplazada 2 a la derecha
y 1 arriba

Funciones Crecientes y Decrecientes

Definición formal

- **Creciente:** Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **Decreciente:** Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **Constante:** $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1, x_2

Funciones Crecientes y Decrecientes

Definición formal

- **Creciente:** Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **Decreciente:** Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **Constante:** $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1, x_2

Ejemplo: $f(x) = x^2$

- Decreciente en $(-\infty, 0)$
- Creciente en $(0, \infty)$

Funciones Pares e Impares

Función Par

$$f(-x) = f(x) \text{ para todo } x$$

- Simétrica respecto al eje Y
- Ejemplos: x^2 , $|x|$, $\cos(x)$

Funciones Pares e Impares

Función Par

$$f(-x) = f(x) \text{ para todo } x$$

- Simétrica respecto al eje Y
- Ejemplos: x^2 , $|x|$, $\cos(x)$

Función Impar

$$f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x$$

- Simétrica respecto al origen
- Ejemplos: x , x^3 , $\sin(x)$

Funciones Pares e Impares

Función Par

$$f(-x) = f(x) \text{ para todo } x$$

- Simétrica respecto al eje Y
- Ejemplos: x^2 , $|x|$, $\cos(x)$

Función Impar

$$f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x$$

- Simétrica respecto al origen
- Ejemplos: x , x^3 , $\sin(x)$

Funciones Inyectivas (Uno a Uno)

Definición

f es inyectiva si:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Funciones Inyectivas (Uno a Uno)

Definición

f es inyectiva si:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Cada valor del rango proviene de un único valor del dominio
- **Prueba de la línea horizontal:** Toda horizontal corta en a lo sumo un punto

Funciones Inyectivas (Uno a Uno)

Definición

f es inyectiva si:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Cada valor del rango proviene de un único valor del dominio
- **Prueba de la línea horizontal:** Toda horizontal corta en a lo sumo un punto

Ejemplos

- ✓ $f(x) = 2x + 1$ (lineal con $m \neq 0$)
- × $f(x) = x^2$ (horizontal corta en 2 puntos)
- ✓ $f(x) = x^3$

Funciones Suprayectivas (Sobre)

Definición

$f: A \rightarrow B$ es **suprayectiva** si:

Para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$

Funciones Suprayectivas (Sobre)

Definición

$f: A \rightarrow B$ es **suprayectiva** si:

Para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$

- El rango = codominio
- Todos los elementos de B son alcanzados

Funciones Suprayectivas (Sobre)

Definición

$f : A \rightarrow B$ es **suprayectiva** si:

Para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$

- El rango = codominio
- Todos los elementos de B son alcanzados

Ejemplo

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$$

¿Suprayectiva? ✓ Para todo y , existe $x = (y - 1)/2$

Funciones Suprayectivas (Sobre)

Definición

$f : A \rightarrow B$ es **suprayectiva** si:

Para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$

- El rango = codominio
- Todos los elementos de B son alcanzados

Ejemplo

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$$

¿Suprayectiva? ✓ Para todo y , existe $x = (y - 1)/2$

Contraejemplo

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Funciones Biyectivas

Definición

Una función es **biyectiva** si es:

1. **Inyectiva** (uno a uno)
2. **Suprayectiva** (sobre)

Funciones Biyectivas

Definición

Una función es **biyectiva** si es:

1. **Inyectiva** (uno a uno)
2. **Suprayectiva** (sobre)

Importancia

Solo las funciones biyectivas tienen **inversa**.

Funciones Biyectivas

Definición

Una función es **biyectiva** si es:

1. **Inyectiva** (uno a uno)
2. **Suprayectiva** (sobre)

Importancia

Solo las funciones biyectivas tienen **inversa**.

Ejemplos

- ✓ $f(x) = 2x + 1$ en $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- ✓ $f(x) = x^3$
- × $f(x) = x^2$ (no es inyectiva)

Suma, Resta, Multiplicación y División

Operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Suma, Resta, Multiplicación y División

Operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dominio de la función resultante

- Para $f \pm g, f \cdot g$: $D = D_f \cap D_g$
- Para f/g : $D = D_f \cap D_g$ y $g(x) \neq 0$

Suma, Resta, Multiplicación y División

Operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dominio de la función resultante

- Para $f \pm g, f \cdot g$: $D = D_f \cap D_g$
- Para f/g : $D = D_f \cap D_g$ y $g(x) \neq 0$

Ejemplo

$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - 1, \quad (f + g)(x) = \sqrt{x} + x - 1, D = [0, \infty)$$

Composición de Funciones

Definición

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Composición de Funciones

Definición

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

- Se evalúa primero g en x
- Luego f en el resultado de g

Composición de Funciones

Definición

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

- Se evalúa primero g en x
- Luego f en el resultado de g

Ejemplo

$$f(x) = x^2, g(x) = 2x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$$

Composición de Funciones

Definición

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

- Se evalúa primero g en x
- Luego f en el resultado de g

Ejemplo

$$f(x) = x^2, g(x) = 2x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$$

Observación

$f \circ g \neq g \circ f$ en general.

Dominio de la Función Compuesta

Regla

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

Dominio de la Función Compuesta

Regla

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

1. Encontrar D_g
2. Encontrar los valores de $g(x)$ que están en D_f
3. Intersecar

Dominio de la Función Compuesta

Regla

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

1. Encontrar D_g
2. Encontrar los valores de $g(x)$ que están en D_f
3. Intersecar

Ejemplo

$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - 3$$

$$D_f = [0, \infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 3}$$

$$\text{Dominio: } x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$$

Función Inversa - Definición

Definición

f^{-1} es la inversa de f si:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad y \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Función Inversa - Definición

Definición

f^{-1} es la inversa de f si:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Condiciones de existencia

f debe ser **biyectiva**.

Función Inversa - Definición

Definición

f^{-1} es la inversa de f si:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Condiciones de existencia

f debe ser biyectiva.

Dominio y rango

- $D_{f^{-1}} = R_f$
- $R_{f^{-1}} = D_f$

Función Inversa - Definición

Definición

f^{-1} es la inversa de f si:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Condiciones de existencia

f debe ser biyectiva.

Dominio y rango

- $D_{f^{-1}} = R_f$
- $R_{f^{-1}} = D_f$

¡Cuidado!

f^{-1} NO significa $1/f$.

Simetría de la Función Inversa

Propiedad fundamental

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Simetría de la Función Inversa

Propiedad fundamental

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo

- $f(x) = 2x + 1$
- $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Simetría de la Función Inversa

Propiedad fundamental

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo

- $f(x) = 2x + 1$
- $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Puntos notables

Si (a, b) está en f , entonces (b, a) está en f^{-1} .

Método para Hallar la Inversa (1)

Pasos para encontrar $f^{-1}(x)$

1. Escribir $y = f(x)$
2. Intercambiar x e y
3. Despejar y
4. Escribir $f^{-1}(x) = (\text{expresión despejada})$

Método para Hallar la Inversa (2)

Ejemplo

$$f(x) = 2x + 3$$

1. $y = 2x + 3$

2. $x = 2y + 3$

3. $2y = x - 3 \rightarrow y = \frac{x-3}{2}$

4. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

Función Exponencial

Definición

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0, a \neq 1$

Función Exponencial

Definición

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0, a \neq 1$

- $a > 1$: **Crecimiento** exponencial
- $0 < a < 1$: **Decrecimiento** exponencial
- $a = e$: **Exponencial natural** $f(x) = e^x$

Función Exponencial

Definición

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0, a \neq 1$

- $a > 1$: **Crecimiento** exponencial
- $0 < a < 1$: **Decrecimiento** exponencial
- $a = e$: **Exponencial natural** $f(x) = e^x$

Características

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $(0, \infty)$
- Corta el eje Y en $(0, 1)$
- Asíntota horizontal: $y = 0$ (eje X)

Función Logarítmica

Definición

$$f(x) = \log_a(x)$$

donde $a > 0, a \neq 1$

Función Logarítmica

Definición

$$f(x) = \log_a(x)$$

donde $a > 0, a \neq 1$

Relación con exponencial

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

Función Logarítmica

Definición

$$f(x) = \log_a(x)$$

donde $a > 0, a \neq 1$

Relación con exponencial

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

- $a = 10$: logaritmo común $\log(x)$
- $a = e$: logaritmo natural $\ln(x)$

Función Logarítmica

Definición

$$f(x) = \log_a(x)$$

donde $a > 0, a \neq 1$

Relación con exponencial

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

- $a = 10$: logaritmo común $\log(x)$
- $a = e$: logaritmo natural $\ln(x)$

Características

- Dominio: $(0, \infty)$
- Rango: $\mathbb{R}$
- Corta el eje X en $(1, 0)$

Relación Exponencial - Logarítmica

Inversas entre sí

$$f(x) = a^x \quad y \quad f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

Relación Exponencial - Logarítmica

Inversas entre sí

$$f(x) = a^x \quad y \quad f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

Propiedades importantes

$$\log_a(a^x) = x$$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

Relación Exponencial - Logarítmica

Inversas entre sí

$$f(x) = a^x \quad y \quad f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

Propiedades importantes

$$\log_a(a^x) = x$$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

- Simétricas respecto a $y = x$
- **Cambio de base:** $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Funciones Trigonométricas (1)

Funciones principales

- $\sin(x)$: seno
- $\cos(x)$: coseno
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$: tangente

Funciones Trigonométricas (1)

Funciones principales

- $\sin(x)$: seno
- $\cos(x)$: coseno
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$: tangente

Características

Función	Dominio	Rango	Período
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π
$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\mathbb{R}$	π

Funciones Trigonométricas (2)

Funciones recíprocas

- $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
- $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
- $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

Funciones Trigonométricas (2)

Funciones recíprocas

- $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
- $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
- $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

Dominios restringidos

Estas funciones tienen restricciones adicionales en sus dominios debido a los denominadores.

Funciones como Modelos Matemáticos

¿Qué es un modelo matemático?

Representación de una situación real mediante funciones.

Funciones como Modelos Matemáticos

¿Qué es un modelo matemático?

Representación de una situación real mediante funciones.

Ejemplos

- **Física:** $d(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ (movimiento)
- **Economía:** $C(x) = mx + b$ (costo lineal)
- **Biología:** $P(t) = P_0e^{rt}$ (crecimiento poblacional)

Funciones como Modelos Matemáticos

¿Qué es un modelo matemático?

Representación de una situación real mediante funciones.

Ejemplos

- **Física:** $d(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ (movimiento)
- **Economía:** $C(x) = mx + b$ (costo lineal)
- **Biología:** $P(t) = P_0e^{rt}$ (crecimiento poblacional)

Pasos para modelar

1. Identificar variables
2. Establecer relación matemática
3. Verificar con datos

Interpretación de Parámetros

Interpretación gráfica

- **Pendiente:** razón de cambio
- **Corte:** valor inicial
- **Asíntotas:** valores límite

Interpretación de Parámetros

Interpretación gráfica

- **Pendiente:** razón de cambio
- **Corte:** valor inicial
- **Asíntotas:** valores límite

Interpretación contextual

¿Qué significa cada parámetro en la situación?

Interpretación de Parámetros

Interpretación gráfica

- **Pendiente:** razón de cambio
- **Corte:** valor inicial
- **Asíntotas:** valores límite

Interpretación contextual

¿Qué significa cada parámetro en la situación?

Ejemplo

$$P(t) = 1000(1.05)^t$$

- 1000: población inicial
- 1.05: factor de crecimiento (5 % anual)
- t : tiempo en años

Síntesis de Conceptos Clave

Resumen de conceptos fundamentales

Concepto	Definición clave
Función	Relación donde cada entrada tiene una única salida
Dominio	Valores permitidos de x
Rango	Valores reales de $f(x)$
Inyectiva	Cada salida viene de una única entrada
Suprayectiva	Rango = codominio
Biyectiva	Inyectiva + Suprayectiva
Inversa	Solo si es biyectiva. Simétrica a $y = x$
Composición	$f(g(x))$

Recomendaciones Finales

Para estudiar funciones

1. **Practica gráficas** → Dibuja siempre que puedas
2. **Domina las transformaciones** → Te ayudarán con cualquier función
3. **Memoriza funciones básicas** → Son la base para todo
4. **Verifica dominios** → Siempre pregunta: ¿qué valores de x son válidos?
5. **Relaciona con la vida real** → Las funciones están en todas partes

Ejercicios de Práctica (1)

1. Dominio

Encuentra el dominio de:

- $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$
- $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

Ejercicios de Práctica (1)

1. Dominio

Encuentra el dominio de:

- $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$
- $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

2. Transformaciones

Grafica $f(x) = -(x+1)^2 + 4$ a partir de $y = x^2$

3. Composición

Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$, encuentra $(f \circ g)(x)$ y su dominio

Ejercicios de Práctica (2)

3. Composición

Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$, encuentra $(f \circ g)(x)$ y su dominio

4. Inversa

Encuentra $f^{-1}(x)$ para $f(x) = \sqrt{x+1}$

Ejercicios de Práctica (2)

3. Composición

Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$, encuentra $(f \circ g)(x)$ y su dominio

4. Inversa

Encuentra $f^{-1}(x)$ para $f(x) = \sqrt{x+1}$

Sugerencia

Verifica siempre el dominio de la función original antes de buscar la inversa.